第十二章

1. 常数项级数

定义： 一般地，如果给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots,$$

那么由这数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

叫做（常数项）无穷级数，简称（常数项）级数，记为 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$，即

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_i + \cdots,$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项.

2. 级数的收敛与发散、收敛级数的和

定义： 如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s，即

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

那么称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，这时极限 s 叫做这级数的和，并写成

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_i + \cdots;$$

如果 $\{s_n\}$ 没有极限，那么称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散.

补充： 当级数收敛时，其部分和 s_n 是级数的和 s 的近似值，它们之间的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

叫做级数的余项. 用近似值 s_n 代替和 s 所产生的误差是这个余项的绝对值，即误差是 $|r_n|$.

3. 级数的基本性质

性质 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 ks.

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s 与 σ，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $s \pm \sigma$.

性质 3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

性质 4 收敛级数加括号仍收敛且和不变

性质 5 （级数收敛的必要条件）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

4. 几何级数及其敛散性

定义：无穷级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

叫做等比级数（又称为几何级数），其中 $a \neq 0, q$ 叫做级数的公比.

$|q| < 1$，级数收敛;$|q| \geqslant 1$, 级数发散.

5. *p*级数及其敛散性

定义: p级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{p}}} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

其中常数 $p > 0$.

当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leqslant 1$ 时发散.

6. 正项级数敛散性的判定

定义：正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ (u_n \geqslant 0)$$

补充：（敛散判定）：

定理 1：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

定理 2（比较审敛法）： 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant v_n (n=1,2,\cdots)$. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；反之，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

定理 3(比较审敛法的极限形式）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，

(1）如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 \leqslant l < +\infty)$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2） 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l > 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理 4(比值审敛法，达朗贝尔（d' Alembert）判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

那么当 $\rho < 1$ 时级数收敛，$\rho > 1$（或 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ ）时级数发散，$\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散.

定理 5(根值审敛法，柯西判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

那么当 $\rho < 1$ 时级数收敛，$\rho > 1$（或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$ ）时级数发散，$\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散.

定理 6(极限审敛法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，

（1）如果 $\lim_{n\to\infty} n u_n = l > 0$（或 $\lim_{n\to\infty} n u_n = +\infty$ ），那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

（2）如果 $p > 1$，而 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l (0 \leqslant l < +\infty)$，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

7. 交错级数与莱布尼兹准则

定义：

交错级数： $\sum_{n=1}(-1)^{n-1}u_n, u_n > 0$

莱布尼茨准则：若（1）$\{u_n\}$ 单调减；

（2）$\lim_{n\to\infty}u_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

补充： $\{u_n\}$ 单调减，$\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛的充分条件，但非必要条件.

8. 任意项级数的绝对收敛与条件收敛

定义：

（1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛，此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

（2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

补充：

（1）绝对收敛的级数一定收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（2）条件收敛的级数的所有正项（或负项）构成的级数一定发散.

即：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+|u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n-|u_n|}{2}$ 发散.

9. 函数项级数的收敛域与和函数的概念

定义：

（1. 函数项级数：如果给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \cdots, u_n(x), \cdots,$$

那么由这函数列构成的表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为定义在区间 I 上的（函数项）无穷级数，简称（函数项）级数.

（2. 函数项级数的收敛域

对于每一个确定的值 $x_0 \in I$，函数项级数成为常数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots.$$

如果级数收敛，就称点 x_0 是函数项级数的收敛点，收敛点的全体称为它的收敛域.

（3. 和函数

对应于收敛域内的任意一个数 x，函数项级数成为一收敛的常数项级数，因而有一确定的和 s，在收敛域上，函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$，通常称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数，这个函数的定义域就是级数的收敛域，并写成

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x).$$

10. 幂级数及其收敛半径、收敛区间和收敛域

定义： 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

或者

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

的函数项级数称为幂级数.

11. 幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域

定义： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛性有且仅有以下三种可能：

（1）对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都收敛；

（2）仅在 $x=0$ 处收敛；

（3）存在一个正数 R，当 $|x|<R$ 时绝对收敛，当 $|x|>R$ 时发散.

正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径. 开区间 $(-R,R)$ 称为它的收敛区间. 若再考察 $x=$

$\pm R$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性，可得出该级数收敛点的全体，称之为收敛域.

补充：

（1）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处条件收敛, 则点 x_0 必为该幂级数收敛区间 $(-R,\ R\ )$ 的一个端点.

（2）若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则 $R = \frac{1}{\rho}$，

若$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则 $R = \frac{1}{\rho}$.

12. 幂级数的和函数

定义：

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

或

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

13. 幂级数在其收敛区间内的基本性质

设幂级数 $\sum_{n=0} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，和函数为 $S(x)$，则

（1）连续性：$S(x)$ 在收敛域上连续.

（2）可导性：$S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可导，且可逐项求导，即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, (|x| < \mathbf{R}).$$

求导后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

(3) 可积性：$S(x)$ 在收敛域上可积，且可逐项积分，即

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

积分后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

补充：有理运算

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R_1, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2，令 $R=\min\{R_1, R_2\}$，则有

（1）加法：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) x^n$，$x \in(-R, R)$.

（2）减法：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n) x^n$，$x \in(-R, R)$.

（3）乘法：$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$

$$= a_0 b_0+(a_0 b_1+a_1 b_0) x+(a_0 b_2+a_1 b_1+a_2 b_0) x^2+\cdots+(a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\cdots+ a_n b_0) x^n+\cdots, x \in(-R, R).$$

（4）除法：$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，$x \in(-R, R)$，

其中系数 $c_n(n=0,1,2 \cdots)$ 由 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 所确定，且 $b_0 \neq 0$.

14. 初等函数的幂级数展开式

定义：设函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 上有定义，若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

对任意的 $x \in(x_0-R, x_0+R)$ 都成立，则称函数 $f(\bar{x})$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 上能展开为 $x-x_0$ 的幂级数.

补充：几个常用的展开式

（1）$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad(-1<x<1)$.

（2）$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad(-1<x<1)$.

（3）$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad(-\infty<x<+\infty)$.

（4）$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad(-\infty<x<+\infty)$.

（5）$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad(-\infty<x<+\infty)$.

（6）$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad(-1<x \leqslant 1)$.

(7) $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$(-1<x<1$，区间端点展开式是否成立由 α 的值确立).

15. 简单幂级数的和函数的求法

（1）利用已有的几个展开式（$\frac{1}{1-x}$，e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$，$(1+x)^{\alpha}$）

（2）利用幂函数的性质（有理运算，逐项求导，逐项积分）

16. 函数的傅里叶（Fourier）系数与傅里叶级数

定义：

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\ \mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$$

为 $f(x)$ 的傅里叶系数，称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数. 记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

17. 狄利克雷（Dirichlet）定理（收敛定理）

定义：

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，且最多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛，且收敛于

（1） $S(x)=f(x)$， 当 x 为 $f(x)$ 的连续点.

（2） $S(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$, 当 x 为 $f(x)$ 的间断点.

（3） $S(x)=\frac{f((-\pi)^+)+f(\pi^-)}{2}$, 当 $x=\pm\pi$.

18. 函数在$[-l,l]$上的傅里叶级数

（1） $[-l,l]$ 上展开

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ \bar{n}=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots.$$

（2） $[-l,l]$ 上奇偶函数的展开

若 $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots.$$

若 $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=0,\ n=1,2,\cdots$$

19. 函数在 $[0,l]$ 上的正弦级数和余弦级数

展为正弦.

$$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots.$$

展为余弦.

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=0,\ n=1,2,\cdots$$