

第一章 函数与极限

考点 1: 映射

定义: 设 X, Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则 f , 使得对 X 中每个元素 x , 按法则 f , 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 那么称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作

$$f: X \rightarrow Y,$$

其中 y 称为元素 x (在映射 f 下) 的像, 并记作 $f(x)$, 即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y (在映射 f 下) 的一个原像; 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = X$; X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(X)$, 即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

补充: (1) 构成一个映射必须具备以下三个要素: 集合 X , 即定义域 $D_f = X$; 集合 Y , 即值域的范围: $R_f \subset Y$; 对应法则 f , 使对每个 $x \in X$, 有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应。

(2) 对每个 $x \in X$, 元素 x 的像 y 是唯一的; 而对每个 $y \in R_f$, 元素 y 的原像不一定是唯一的; 映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集, 即 $R_f \subset Y$, 不一定 $R_f = Y$ 。

考点 2: 逆映射与复合映射

定义: 设 f 是 X 到 Y 的单射, 则由定义, 对每个 $y \in R_f$, 有唯一的 $x \in X$, 适合 $f(x) = y$ 。于是, 我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g , 即

$$g: R_f \rightarrow X,$$

对每个 $y \in R_f$, 规定 $g(y) = x$, 这 x 满足 $f(x) = y$ 。这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1} , 其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域 $R_{f^{-1}} = X$ 。

考点 3: 函数

定义: 设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$ 。

函数的定义中, 对每个 $x \in D$, 按对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$ 。因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 通常称为函数关系。函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

补充: 按照上述定义, 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的: 前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则, 而后者表示与自变量 x 对应的函数值。但为了叙述方便, 习惯上常用记号 “ $f(x), x \in D$ ” 或 “ $y = f(x), x \in D$ ” 来表示定义在 D 上的函数, 这时应理解为由它所确定的函数 f 。

考点 4: 函数的有界性

定义: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , $X \subset D$. 如果存在数 K_1 , 使得 $f(x) \leq K_1$ 对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界。

如果存在数 K_2 , 使得 $f(x) \geq K_2$ 对任一 $x \in X$ 都成立, 么称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界, K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界。

如果存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$ 对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在, 称函数 $f(x)$ 在 X 上无界;

这就是说, 如果对于任何正数 M , 总存在 $x_1 \in X$, 使 $|f(x_1)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界。

考点 5: 函数的单调性

定义: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的; 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

考点 6: 函数的奇偶性

定义: 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 那么称 $f(x)$ 为偶函数。如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 那么称 $f(x)$ 为奇函数。

考点 7: 函数的周期性

定义: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在一个正数 l , 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且

$$f(x + l) = f(x)$$

恒成立, 那么称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期。

考点 8: 反函数与复合函数

定义: 设函数 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$, 称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数。

对每个 $y \in f(D)$, 有唯一的 $x \in D$, 使得 $f(x) = y$, 于是有 $f^{-1}(y) = x$ 这就是说, 反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的。

考点 9: 函数的运算

定义: 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域依次为 $D_f, D_g, D = D_f \cap D_g \neq \emptyset$, 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

$$\begin{aligned} f \pm g: (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x), x \in D \\ f \cdot g: (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), x \in D \\ \frac{f}{g}: \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0, x \in D\} \end{aligned}$$

考点 10: 初等函数

定义: (1) 幂函数: $y = x^\mu (\mu \in \mathbb{R} \text{ 是常数})$,

(2) 指数函数: $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$,

(3) 对数函数: $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, \text{ 特别当 } a = e \text{ 时, 记为 } y = \ln x)$,

(4) 三角函数: 如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等,

(5) 反三角函数: 如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数。

考点 11: 数列极限

定义: 设 $\{x_n\}$ 为一数列, 如果存在常数 a , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立, 那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

或

$$x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

如果不存在这样的常数 a , 就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的, 习惯上也说 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

考点 12: 数列极限的性质

性质: (1) 唯一性: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一。

(2) 有界性: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界。

(3) 保号性: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$)。

补充 1: 推论——如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那么 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$)。

补充 2: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a 。

考点 13: $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限

定义: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{)}.$$

补充: 定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$, 所以 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 有没有极限, 与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义并无关系. 有时只能或只需考虑 x 仅从 x_0 的单侧趋于 x_0 的情形:

(1) 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, 把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$, 那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

类似地, 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, 把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 < x < x_0 + \delta$, 那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A.$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

考点 14: 自变量趋于无穷大时函数的极限

定义: 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在着正数 X , 使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow \infty \text{)}.$$

考点 15: 函数极限的性质

性质: (1) 唯一性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一。

(2) 局部有界性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$ 。

(3) 局部保号性: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。

补充: (1) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A (A \neq 0)$, 那么就存在着 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 当 $x \in \dot{U}(x_0)$

时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$ 。

(2) 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$)。

考点 16: 函数极限与数列极限的关系

定义: 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足 $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{N}_+)$, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。

考点 17: 无穷小

定义: 如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小。

补充 1: 以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小。

补充 2: 在自变量的同一变化过程 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 是无穷小。

考点 18: 无穷大

定义: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于某一正数时有定义)。如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正数 δ (或正数 X), 只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)| > M$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大。

补充: 在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

考点 19: 极限运算法则

定理 1: 个无穷小的和是无穷小;

定理 2: 有界函数与无穷小的乘积是无穷小;

常数与无穷小的乘积是无穷小;

有限个无穷小的乘积是无穷小;

定理 3: 如果 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$;

(3) 若又有 $B \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$ 。

补充 1: 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 那么 $\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$ 。

补充 2: 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 那么 $\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$ 。

定理 4: 设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 那么

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B;$$

$$(3) \text{ 当 } y_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots) \text{ 且 } B \neq 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}.$$

定理 5: 如果 $\varphi(x) \geq \psi(x)$, 而 $\lim \varphi(x) = A$, $\lim \psi(x) = B$, 那么 $A \geq B$ 。

考点 20: 复合函数极限运算法则

定理: 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ 。

考点 21: 极限存在准则

准则 1: 如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

(1) 从某项起, 即 $\exists n_0 \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $y_n \leq x_n \leq z_n$;

(2) $\lim y_n = a$, $\lim z_n = a$,

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

准则 2: 单调有界数列必有极限。

补充: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在。

考点 22: 夹逼准则

定义: 如果

(1) 当 $x \in \dot{U}(x_0, r)$ (或 $|x| > M$) 时, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A$,

那么 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 存在, 且等于 A 。

考点 23: 柯西极限存在准则

定义: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的正数 ε , 存在正整数 N , 使得当 $m >$

N , $n > N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$ 。

考点 24: 无穷小的比较

定义: 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小;

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么就说 β 与 α 是同阶无穷小;

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$ 。

补充: 等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形, 即 $c=1$ 的情形。

考点 25: 等价无穷小

定理 1: β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$ 。

定理 2: 设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}$, $\beta \sim \tilde{\beta}$, 且 $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 。

考点 26: 增量

定义: 设变量 u 从它的一个初值 u_1 变到终值 u_2 , 终值与初值的差 $u_2 - u_1$ 就叫做变量 u 的增量, 记作 Δu , 即 $\Delta u = u_2 - u_1$ 。

考点 27: 函数的连续性

定义: 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续。

补充: 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

考点 28: 函数的间断点

定义: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义。在此前提下, 如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一:

(1) 在 $x = x_0$ 没有定义;

(2) 虽在 $x = x_0$ 有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 虽在 $x = x_0$ 有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续, 而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点。

考点 29: 第一类与第二类间断点

定义: 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点, 但左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在, 那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点。不是第一类间断点的任何间断点, 称为第二类间断点。

补充: 第一类间断点中, 左、右极限相等者称为可去间断点, 不相等者称为跳跃间断点。无穷间断点和振荡间断点是第二类间断点。

考点 30: 连续函数的和、差、积、商的连续性

定理: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 则它们的和(差) $f \pm g$ 、积 $f \cdot g$ 及商 $\frac{f}{g}$ (当 $g(x_0) \neq 0$ 时) 都在点 x_0 连续。

考点 31: 反函数与复合函数的连续性

定理 1: 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续, 那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y = \{y \mid y=f(x), x \in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续。

定理 2: 设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成, $\dot{U}(x_0) \subset D_{f \cdot g}$ 。若

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$ 。

定理 3: 设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成, $\dot{U}(x_0) \subset D_{f \cdot g}$ 。若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, 且 $g(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续, 则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 也连续。

考点 32: 初等函数的连续性

定理: 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的; 一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

补充: 包含在定义域内的区间称为定义区间。

考点 33: 最大值和最小值

定义: 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有 $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$), 那么称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(最小值)。

考点 34: 有界性

定义: 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 那么存在常数 $M > 0$, 使得对任一 $x \in [a, b]$, 满足 $|f(x)| \leq M$ 。

考点 35: 最大值最小值

定义: 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 至少有一点 ξ_1 , 使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值; 又至少有一点 ξ_2 , 使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值。

考点 36: 零点定理

定义: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a) \cdot f(b) < 0$), 则在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$ 。

考点 37: 介值定理

定义: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a) = A$ 及 $f(b) = B$, 则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C , 在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C (a < \xi < b)$ 。

补充: 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 的值域为闭区间 $[m, M]$, 其中 m 与 M 依次为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值。

考点 38: 一致连续性

定义: 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义。如果对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2 , 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

补充: 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 那么它在该区间上一致连续。

第二章 导学与微分

考点 1: 导数

定义: 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地, 因变量取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在, 那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数,

记为 $f'(x_0)$, 即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 也可记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ 。

考点 2: 导数公式

$$(1) (C)' = 0;$$

$$(2) (x^n)' = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ nx^{n-1}, & n > 1 \end{cases};$$

$$(3) (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1};$$

$$(4) (\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(5) (\tan x)' = \sec^2 x;$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x;$$

$$(6) (\sec x)' = \sec x \tan x;$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x;$$

$$(7) (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(9) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(10) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

考点3: 单侧导数

定义: 根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的定义, 导数 $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 是一个极限, 而极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在且相等, 因此 $f'(x_0)$ 存在即 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左、右极限 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 及 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 都存在且相等。这两个极限分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数, 记作 $f'_-(x_0)$ 及 $f'_+(x_0)$, 即 $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 。左导数和右导数统称为单侧导数。

补充1: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等。

补充2: 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在, 那么就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导。

考点4: 导数的几何意义

定义: 数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率, 即 $f'(x_0) = \tan \alpha$, 其中 α 是切线的倾角。

考点5: 函数可导性与连续性的关系

定理1: 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 那么函数在该点必连续;

定理2: 一个函数在某点连续, 但不一定在该点可导。

考点6: 函数的和、差、积、商的求导法则

定理: 如果函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 都在点 x 具有导数, 那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x 具有导数, 且

- (1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;
- (2) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
- (3) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} (v(x) \neq 0)$ 。

考点7: 反函数的求导法则

定理: 如果函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{x \mid x = f(y), y \in I_y\}$ 内也可导, 且 $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$ 或 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 。

考点 8: 复合函数求导法则

定理: 如果 $u = g(x)$ 在点 x 处可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 处可导, 那么复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 处可导, 且其导数为 $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 。

考点 9: 高阶导数

定义: 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x 处具有阶导数, 那么 $y = f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数。二阶及二阶以上的导数统称高阶导数。

考点 10: 莱布尼兹公式

定义: $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

考点 11: 参数方程

定义: 如 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 中, x, y 都与 t 存在函数关系, 这个方程称作 x, y 关于 t 的参数方程。如果把对应于同一个 t 值的 y 与 x 的值看做是对应的, 能得到 y 与 x 之间的函数关系, 则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数。

考点 12: 参数方程导数公式

定义: 对于一个参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, 其所确定的对于 x 的导数公式为 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, 也可写作 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 。

考点 13: 相关变化率

定义: 设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数, 而变量 x 与 y 间存在某种关系, 从而变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 中间也存在一定关系, 这两个相互依赖的变化率称为相关变化率。

考点 14: 微分

定义: 设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义, x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 在这区间内, 如果函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy , 即 $dy = A\Delta x$ 。

补充: 在 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件下, 以微分 $dy = f'(x_0)\Delta x$ 近似代替增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 时, 其误差为 $o(dy)$ 。因此, 在 $|\Delta x|$ 很小时, 有近似等式 $\Delta y \approx dy$ 。

考点 15: 基本初等函数的微分公式

$$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx (\mu \text{ 是任意常数})$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx$$

$$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$$

$$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

考点 16: 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(Cu) = Cdu (C \text{ 是常数})$$

$$d(uv) = vdu + u dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} (v \neq 0)$$

考点 17: 复合函数的微分法则

定理: 设 $y = f(u)$ 及 $u = g(x)$ 都可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分为 $dy = y'_x dx = f'(u)g'(x)dx$ 。也可写成 $dy = f'(u)du$ 或 $dy = y'_u du$ 。

第三章 微分中值定理与导数的应用

考点 1: 费马引理

定义: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 并且在 x 处可导, 如果对任意的 $x \in U(x_0)$, 有 $f(x) \leq f(x_0)$ (或 $f(x) \geq f(x_0)$), 那么 $f'(x_0) = 0$ 。

考点 2: 罗尔定理

定义: 如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

考点 3: 拉格朗日中值定理

定义: 如果函数 $f(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导,

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立。

补充: 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, I 内可导且导数恒为零, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数。

考点 4: 柯西中值定理

定义: 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 对任一 $x \in (a, b)$, $F'(x) \neq 0$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使等式 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 成立。

考点 5: 洛必达法则

定义: 设

- (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;
- (2) 在点 a 的某去心邻域内, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大),

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

这种在一定条件下通过分子、分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则。

补充: 设

- (1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;
- (2) 当 $|x| > N$ 时 $f'(x)$ 与 $F'(x)$ 都存在, 且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大)

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

考点 6: 带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式

定义: 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \quad \text{其中 } R_n(x) = o((x - x_0)^n).$$
考点 7: 带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

定义: 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶导数, 那么对任一 $x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \quad \text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值。

考点 8: 函数单调性的判定法

定理: 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导。

- (1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) \geq 0$, 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;
- (2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) \leq 0$, 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少。

考点 9: 曲线的凹凸性

定义: 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凹的(或凹弧); 如果恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凸的(或凸弧)。

考点 10: 拐点及其求解方法

定义: 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是 I 内的点。如果曲线 $y = f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 曲线的凹凸性改变了, 那么就称点 $(x_0, f(x_0))$ 为这曲线的拐点。

解法:

- (1) 求 $f''(x)$;
- (2) 令 $f''(x) = 0$, 解出这方程在区间 I 内的实根, 并求出在区间 I 内 $f''(x)$ 不存在的点;
- (3) 对于(2)中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点 x_0 , 检查 $f''(x)$ 在 x_0 左右两侧邻近的符号, 那么当两侧的符号相反时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点, 当两侧的符号相同时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点。

考点 11: 曲线凹凸性的判定

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数, 那么

- (1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;
- (2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的。

考点 12: 函数的极值

定义: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对于去心邻域 $U(x_0)$ 内的任一 x , 有 $f(x) < f(x_0)$ (或 $f(x) > f(x_0)$), 那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值)。函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为极值点。

考点 13: 函数取得极值的必要条件

定理: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$ 。

考点 14: 函数取得极值的第一充分条件

定理: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0, \delta)$ 内可导。

- (1) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。

- (2) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。
- (3) 若 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 的符号保持不变, 则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值。

考点 15: 函数取得极值的第二充分条件

定理: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则

- (1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;
- (2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

考点 16: 求解函数最大值最小值

求法: (1) 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点及不可导点;

(2) 计算 $f(x)$ 在上述驻点、不可导点处的函数值及 $f(a), f(b)$;

(3) 比较(2)中诸值的大小, 其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 最小的便是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值。

考点 17: 曲率的表达式

定义: $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

补充: 在参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 下, 曲率的表达式为 $K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{3/2}}$ 。

考点 18: 曲率圆与曲率半径

定义: 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $K (K \neq 0)$ 。在点 M 处的曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D , 使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$ 。以 D 为圆心, ρ 为半径作圆, 这个圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆, 曲率圆的圆心 D 叫做曲线在点 M 处的曲率中心, 曲率圆的半径 ρ 叫做曲线在点 M 处的曲率半径。

补充: 曲线上一处处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数, $\rho = \frac{1}{K}$, $K = \frac{1}{\rho}$ 。